1)

Proposition de corrigé

Analyse II (MPI 1, 2016-2017)

Exercice 1

1. Calcul d'intégrales

(1)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2 - \cancel{x}} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(0,5)

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} \frac{2\,du}{u^2-1} = \left[\ln \frac{u-1}{u+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e+1}} = \ln \frac{(\sqrt{e+1}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{e+1}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$(u = \sqrt{e^x+1})$

$$I_3 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)} =$$

$$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1+\tan^2 x)\,dx.$$

$$I_3 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\cos^2 x \sin x}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan x} \times \frac{dx}{\cos^2 x}$$

(1)

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\ln\sqrt{3} = \ln 3$$

2. Calcul de primitives

(0,5)

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + k$$

(1)

$$\int \frac{\cosh x}{\sinh x + \cosh x}\,dx = \int -\frac{du}{(u-1)(u+1)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x+1}{\operatorname{th} x-1}\right| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\operatorname{th} x} + k \quad (u = \operatorname{th} x)$$

ou

$$= \int \frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\,dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2x}}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4e^{2x}} + k$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,dx = \int \frac{-2y^2\,dy}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + k$$ 1

$$= \sqrt{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{|x-1|}-\sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x-2|}} + k.$$

1

3 - Limites

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2(k/n)}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \cancel{\tfrac{1}{2}\ln 2} = \sqrt{3}-1$$

en utilisant les dl on trouve ($f(x) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$) 1

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = e.$$

4 - Resolution de équations différentielles : 1

(a) $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$

Soit $(E) : y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$

$(E_H) : y' + 2y = 0$

$y_H(x) = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

considerant la forme du second membre, on cherche une solution particulière de (E) de la forme :

$y_p(x) = ae^x + b\cos x + c\sin x$

on a alors : $y' + 2y = 3ae^x + (2c-b)\sin x + (c+2b)\cos x$

d'où $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{3}{5}$

La solution générale de (E) est :

$$y(x) = \frac{4}{3}e^{x} + \frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x + \lambda e^{-2x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) $y'' - 3y' + 2y = x(e^{x} + e^{-2x})$

(EC) : $r^2 - 3r + 2 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

$$y_H = \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$$

Par le principe de superposition des solutions on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x} + (ux + v)e^{-2x}$$

et on obtient $y_p'' - 3y_p' + 2y = (-2ax + (2a - b))e^{x} + (12ux + (12v - 7u))e^{-2x}$

donc $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $u = \frac{1}{12}$, $v = \frac{7}{144}$. 1

La solution générale est donc :

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{x} + \left(\frac{1}{12}x + \frac{7}{144}\right)e^{-2x} + \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$$

Exercice 2

$$f(x) = x \,\mathrm{sh}\frac{1}{x}$$

1. Montrons que pour tout $x > 0$, $\mathrm{th}\,x < x$.

Soit $g(x) = \mathrm{th}\,x - x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

On a : $g'(x) = 1 - \mathrm{th}^2 x - 1 = -\mathrm{th}^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

g est donc strictement décroissante et comme $g(0)=0$
alors $g(x)<0$ pour tout $x>0$. 1

2. Tableau de variations de f.

on a : $f'(x) = \left(\operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\operatorname{ch}\frac{1}{x}$
f est paire, on fait donc l'étude sur $\mathbb{R}_*^+$ ou sur $\mathbb{R}_*^-$.
Comme ch est strictement positive alors d'après
la question précédente f' est strictement décroissante 1
sur $\mathbb{R}_+^*$.

* limite en 0.

En posant $u = \frac{1}{x}$ on a : $f(x) = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}$
Comme $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

1

* limite en $+\infty$

En posant $u = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\sinh u}{u} \underset{0}{\sim} \frac{u}{u} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1

Après on déduit le tableau sur $]-\infty ; 0[$

3- $Dl_2(0)$ de $\frac{\sinh u}{u}$

$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2)$$

0,5

4- Deduction que f admet en $+\infty$ un dl de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

En posant $u = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$,

1

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6}$

5- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'equation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $U_n > 0$.

f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, elle realise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to 0} f(x)[=]1;+\infty[$. Comme $\frac{n+1}{n} \in]1,+\infty[$

1

alors il existe une unique U_n tel que $f(U_n) = \frac{n+1}{n}$.

6- Montrons que (U_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow f(U_n) \geq f(U_{n+1})$

1

la fonction f étant décroissante alors $U_n \leq U_{n+1}$ d'où le résultat.

7. Montrons que (U_n) tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

on a : $U_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Comme $\frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$, alors

par composition de limite : 0,5

$$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{x \to 1} f^{-1}(x) = +\infty .$$

8. Un équivalent de U_n en $+\infty$

Comme $\lim_{n} U_n = +\infty$ alors si $n \longrightarrow +\infty$

$f(U_n) = 1 + \frac{1}{6U_n^2} + o\left(\frac{1}{U_n^2}\right)$. 1

De plus $f(U_n) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{6U_n^2} + o\left(\frac{1}{U_n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{6U_n^2} + o\left(\frac{1}{U_n^2}\right) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{6U_n^2} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow U_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}$.

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

et $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\, dt$

1- Montrons que f est bien définie et étudions la parité de f.

Comme φ est continue alors f est bien définie.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{sh\,t}{t}\,dt = -\int_{x}^{2x} \frac{sh\,u}{u}\,du = -f(x)$

$(u = -t)$. f est donc impaire. 1

2) Montrons que f est ~~bien définie~~ dérivable et calculons $f'(x)$.

Du fait que φ est continue alors elle possède une primitive F. Comme $f(x) = F(2x) - F(x)$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{sh\,2x - sh\,x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f'(0) = 1$. 1

3) Tableau de variation de f.

Comme f est impaire on étudie f sur $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}^-$.

Pour $x \geq 0$, on a $sh\,2x \geq sh\,x$ d'où pour tout $x > 0$ $f'(x) > 0$.

f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{sh\,t}{t}\,dt \geq \int_{x}^{2x} \frac{sh\,x}{t}\,dt = sh\,x \ln 2$ 1

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

et on deduit sur $]-\infty, 0[$